

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
!!! μόνον άρτιοι !!!			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
26 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

1. (10%) Δείξτε ότι

$$\sqrt{2} \ln \sqrt{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \ln 2 .$$

2. (15%) Ας είναι $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} .$$

(i) Δείξτε ότι $f(0) = 0$.

(ii) Δείξτε ότι $f'(x) = f'(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Βρείτε τον τύπο της f .

3. (10%) Ας είναι $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$f(x) \int_a^x g(t) dt = g(x) \int_x^b f(t) dt$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, b) .

4. (10%) Χρησιμοποιώντας τον σχετικό ορισμό, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} (1-t)e^{-t} dt .$$

5. (10%) Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Σύγκρισης Σειρών, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right) .$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{10n + 2018}{n^2 + 1} \right) .$

6. (10%) Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο D' Alembert ή το Κριτήριο Cauchy, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n \sin \left(\frac{\pi}{3^n} \right) \right) .$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n} \right)^{-n^2} .$

7. (15%) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) $\int_1^x \frac{1}{t(\ln t)^2 + 5t} dt, \quad x \geq 1.$

(ii) $\int_2^x t^2 \ln t dt, \quad x \geq 2.$

(iii) $\int_0^x \text{Arcsin } t dt, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$

8. (20%) Ας είναι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση, όπου $a < b$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.